5. Devoirs maison.

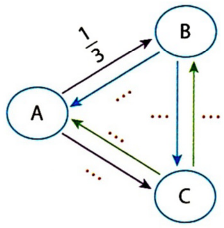
. Devoir maison 04.A. Une marche aléatoire.

Problème étudié :
Monsieur l'Indécis a trois amis A, B et C.
A chaque étape de sa marche aléatoire :

- S'il est chez A, il va chez B ou C avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ pour B
- S'il est chez B, il va chez A ou C avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ pour A
- S'il est chez C, il va chez A ou B de façon équiprobable.

Chez qui a-t-il le plus de chances de se trouver ?
On note par exemple $P_A(C)$ la probabilité d'aller de A vers C, en une étape.

Partie A : Une nouvelle représentation : le graphe probabiliste.



On peut représenter la situation par le graphe ci-dessus, appelé graphe probabiliste.

1. Que représente la probabilité $\frac{1}{3}$ inscrite le long de la flèche allant de A à B ?
2. Compléter ce graphe en inscrivant les probabilités manquantes le long des flèches.

Partie B : A l'aide d'arbres.
On suppose que l'Indécis part de A.

1. Réaliser un arbre de probabilités pour pour une marche à trois étapes.
2. Calculer les probabilités que l'Indécis soit en A, en B, en C en deux étapes.
   On présentera les résultats dans un tableau similaire à celui-ci :

2	A	B	C
A			

3. Faire de même qu'à la question 2, pour une marche en **trois** étapes. On pourra repartir d'un arbre donnant directement les résultats de la question 2.

Pour répondre à la question posée, il faudrait construire à nouveau deux arbres semblables au premier, selon que l'Indécis part de B ou de C... Cette démarche, vite fastidieuse, trouve ici ses limites !
L'utilisation de matrices ve nous permettre de résoudre ce problème de façon beaucoup plus rapide.

Partie C : Avec une matrice de transition.

$$T = \begin{array}{cc} \text{Vers} & \begin{array}{ccc} \quad A \quad & \quad B \quad & \quad C \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} P_A(A) & P_A(B) & P_A(C) \\ P_B(A) & P_B(B) & P_B(C) \\ P_C(A) & P_C(B) & P_C(C) \end{pmatrix} \end{array}$$

On introduit la matrice T, à 3 lignes et 3 colonnes, appelée **matrice de transition**, et formée des probabilités de passage en une étape de A, B ou C vers A, B ou C, comme indiqué ci-dessus.

1. (a) Écrire la matrice T avec tous ses coefficients.
   (b) Que remarque-t-on sur la somme des coefficients d'une ligne ? Justifier.
2. (a) Calculer $T^2 = T \times T$ à la main.
   (b) Quelles probabilités reconnaît-on dans les coefficients de la 1ère ligne de la matrice T^2 ?
   Par analogie, quelle probabilité représenterait le coefficient de T^2 situé en 3ème ligne et 2ème colonne ?
   (c) Inversement, quelles seraient les probabilités d'aller, en deux étapes : de B à A ? de B à B ?
3. (a) Calculer T^3 à la calculatrice.
   (b) Quelles probabilités reconnaît-on dans les coefficients de la 1ère ligne de cette matrice ?

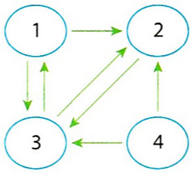
(c) Quelles sont les probabilités d'aller en 3 étapes : de A à B ? de C à B ? de B à B ?

(d) A la fin d'une marche aléatoire en 3 étapes, chez quel ami Monsieur l'Indécis aurait-il le plus de chances de terminer sa marche s'il est parti de A ? Et s'il est parti de B ? Et de C ?

. Devoir maison 04.B. Mise en place d'un mini-réseau intranet.

L'objectif de ce problème est d'étudier la pertinence des liens existant entre quatre pages web, en assimilant la navigation entre les pages à une marche aléatoire sur un graphe à quatre sommets.
On cherche à prévoir quelle sera la page statistiquement la plus fréquentée sur un mini-réseau intranet.

Une petite entreprise expérimente la mise en place d'un mini-réseau intranet pour son personnel.
Pour l'instant, le réseau ne donne accès qu'à 4 pages numérotées (1), (2), (3) et (4).
Ces pages comportent un ou plusieurs liens qui pointent chacun vers l'une des autres pages.
L'organisation de cette "toile" miniature peut être visualisée par le schéma ci-dessous.



1. Un employé entre sur le réseau par la page (4). Sur quelle(s) page(s) peut-il se rendre en un seul clic ? En exactement deux clics ? Peut-il repasser par la page (4) lors de sa navigation sur le réseau ?
2. On suppose dorénavant qu'un employé distrait explore le réseau au hasard : une fois qu'il est entré par l'une des pages, il clique au hasard sur un des liens figurant sur cette page, et il continue sa navigation de la sorte, sans se préoccuper de son parcours antérieur.
   (a) Au vu du schéma, dans quel ordre rangeriez-vous les quatre pages, par ordre croissant de fréquentation ?
   (b) Reproduire et compléter le graphe probabiliste amorcé ci-dessus avec les probabilités manquantes.
   (c) Écrire la matrice $T = (t_{ij})$ de transition associée à ce graphe probabiliste.
   Quelle est la valeur de t_{32} ? A quelle probabilité correspond ce coefficient ?
3. (a) A la calculatrice, calculer T^3, T^4 et T^8. Recopier les résultats obtenus.
   (b) En déduire les probabilités qu'un employé se rende en cliquant au hasard :
   - de la page 2 à la page 3 en trois clics
   - de la page 3 à la page 1 en quatre clics
   - de la page 4 à la page 3 en huit clics
4. On note Y_n la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle l'employé se trouve après n clics, et X_n la matrice ligne représentant la loi de Y_n, c'est-à-dire :
   $X_n = \begin{pmatrix} P(Y_n = 1) & P(Y_n = 2) & P(Y_n = 3) & P(Y_n = 4) \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, par des calculs de probabilités, que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = X_n \times T$.
   (b) Exprimer X_n en fonction de X_0, T et n par une formule matricielle dont on fournira une démonstration.
   (c) Sans effectuer de calculs, donner X_8 lorsque $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Les probabilités d'atteindre chacune des 4 pages dépendent-elles fortement de la page par laquelle l'employé est entré sur le réseau ?
5. (a) A la calculatrice, calculer T^{15} , T^{20} et T^{50}. On donnera les coefficients à 10^{-3} près.
   Qu'observe-t-on ?
   (b) Vérifier que quelle que soit la matrice ligne X_0, X_n semble se stabiliser quand n devient grand autour de $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) On attribue de ce fait aux pages 1, 2, 3, et 4 les indices de pertinence $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$ et 0.
   Quel classement dans l'ordre croissant des indices de pertinence obtient-on pour les quatre pages ?
   Comparer avec la conjecture émise à la question 2.a.
   Compter le nombre de liens aboutissant à une page donne-t-il un renseignement fiable sur la fréquentation de cette page ? Expliquer pourquoi.